$\boxed{\text{oef } 15.8.}$ zij $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -1/2 & -1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

<u>doel</u>: de isometrie g beschrijven

<u>oplossing:</u> zij $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -1/2 & -1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}_{[f]_{E,E}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

het orthogonale deel van g en noem zijn matrix A.
Om te weten welke type isometrie g is, voldoet het om $\det(A)$ en $fix(f)$ te berekenen.

(i) <u>$\det(A)$:</u>

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & -1/2 & -1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{vmatrix} \underset{R_2 - R_1}{=} \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= -1$$

$\Rightarrow f$ is schuifspiegeling of draaispiegeling

(ii) <u>$fix(f)$:</u>

$$fix(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

(*) oplossen!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\sqrt{2}-2}{2} & -1/2 & -1/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \frac{-\sqrt{2}-2}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{K_3 + (-1-\sqrt{2})K_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\sqrt{2}-2}{2} & -1/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 & \frac{-1-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)x = \frac{-\sqrt{2}}{2} z \\ \frac{\sqrt{2}}{2} x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} z \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y = z = 0$$

$$\Rightarrow \dim(fix(f)) = 0$$

$\boxed{\text{oef 15.8, vervolg}}$ Uit $\det(A) = -1$ en $\dim(\mathrm{fix}(f)) = 0$ volgt dat f een draaispiegeling is en bijgevolg g ook (maar met rotatie-as en spiegelvlak verschoven t.o.v. die van het orthogonale deel f).

Bijgevolg om de isometrie 'g' te beschrijven, moeten we (i) rotatie-as, (ii) rotatie-hoek en (iii) spiegelvlak bepalen. Om deze van 'g' te vinden, zullen we eerst (i)–(iii) berekenen voor 'f' en dan zal (i) en (iii) van g gelijk zijn aan die van f maar verschoven met het unieke fixpunt van g.

(i) <u>rotatie-as:</u> aangezien f een rotatie is (waarbij dus de vectoren ~~gevolgd door een~~ van de rotatie-as gefixeerd blijven), gevolgd door een spiegeling omheen een vlak loodrecht op de rotatie-as, ~~worden deze~~ zijn de vectoren van de rotatie-as exact de eigenvectoren van A met eigenwaarde -1:

$$\text{rotatie-as}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{(**)}{=} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

(**) oplossen:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{zelf} \\ \text{narekenen}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow R := \text{rotatie-as}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x = (3-2\sqrt{2})z \\ y = (1-\sqrt{2})z \end{array} \right\}$$

$$= \mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 3-2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(iii) <u>spiegelvlak van f:</u> deze is
$$R^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v} \right\rangle = 0,\ \forall \vec{v} \in R \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

(iii) dus $R^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (3-2\sqrt{2})x + (1-\sqrt{2})y + z = 0 \right\}$

$= \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3+2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

(ii) rotatie-hoek: uit theorie weten we dat er een basis $\mathcal{B}$ van $\mathbb{R}^3$ bestaat zodat

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Maar $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = M^{-1} A M$ voor $M = [1_{\mathbb{R}^3}]_{E,\mathcal{B}}$

z.h.b. $\underset{1/2}{\underset{\parallel}{\text{tr}(A)}} = \text{tr}(M^{-1}AM) = \text{tr}([f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}) = -1 + 2\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = \text{bgcos}\,\frac{3}{4}$ (het is ok als je de waarde niet in decimale vorm geeft, zoals hier)

Dit beëindigt de beschrijving van het orthogonale deel f.
Voor g, zoals eerder gezegd, blijft er ons zijn unieke fixpunt te berekenen.

fixpunt van g: $\text{fix}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{(***)}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$

(***) oplossen: reken zelf na dat je het punt $\underbrace{\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\right\}}_{:= \vec{p}}$ vindt.

conclusie: g is een draaispiegeling met:

(.) rotatie-as: $R + \vec{p}$

(.) rotatie-hoek: $\text{bgcos}\left(\frac{3}{4}\right)$

(.) spiegelvlak: $R^{\perp} + \vec{p}$